第10講　ベクトルと平面図形

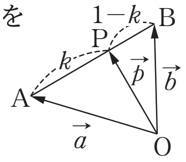
PART1　交点の位置ベクトル

1 [1]　△OAB の辺 OA を 3：1 に内分する点を C，辺 OB を 4：1 に内分する点を D とし，BC と AD の交点を P，CD と OP の交点を Q とする。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とおくとき，$\overrightarrow{OP}$，$\overrightarrow{OQ}$ をそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

[2]　△ABC の辺 AB を 2：1 に内分する点を D，辺 BC の中点を M とし，AM と CD の交点を E とする。$\overrightarrow{AE}$ を $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ を用いて表せ。

Point Pickup

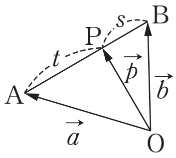
[1]　線分 AB を内分する点 P について，3 点 A，B，P の位置ベクトルをそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{p}$ とすると



$$\vec{p}=(1-k)\vec{a}+k\vec{b}\quad(0<k<1)$$

と表される。これを利用し，2 直線の交点を表す位置ベクトルを，1 次独立である 2 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて 2 通りに表し，その係数を比較することで求めることができる。

[2]　点 P が直線 AB 上にあるとき，3 点 A，B，P の位置ベクトルをそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{p}$ とすると



$s+t=1$

$$\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b},\quad s+t=1$$

と表される。すなわち，$\vec{p}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表したときの $\vec{a}$，$\vec{b}$ の係数の和が 1 である。

とくに，$0<s<1$，$0<t<1$ のとき，AP：PB$=t：s$ である。

第10講　PART1　確認問題

1　△OAB の辺 OA の中点を C，辺 OB を 3：2 に内分する点を D とし，BC と AD の交点を P，CD と OP の交点を Q とする。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とおくとき，$\overrightarrow{OP}$，$\overrightarrow{OQ}$ をそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

$$\overrightarrow{OP}=\frac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}\vec{a}+\frac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}\vec{b}$$

$$\overrightarrow{OQ}=\frac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}}\vec{a}+\frac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}}\vec{b}$$

2　△ABC の辺 AC を 3：2 に内分する点を D，辺 BC を 3：1 に内分する点を E とし，AE と BD の交点を F とする。$\overrightarrow{AF}$ を $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ を用いて表せ。

$$\overrightarrow{AF}=\frac{\boxed{ケ}}{\boxed{コ}}\overrightarrow{AB}+\frac{\boxed{サ}}{\boxed{シ}}\overrightarrow{AC}$$

第 10 講　ベクトルと平面図形

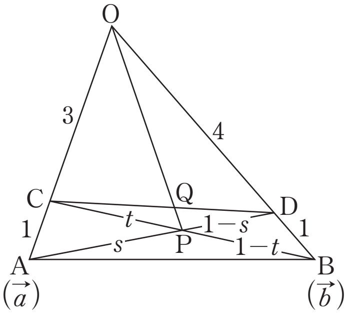
PART1　交点の位置ベクトル

1　[1]　△OAB の辺 OA を 3：1 に内分する点を C，辺 OB を 4：1 に内分する点を D とし，BC と AD の交点を P，CD と OP の交点を Q とする。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とおくとき，$\overrightarrow{OP}$，$\overrightarrow{OQ}$ をそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

[2]　△ABC の辺 AB を 2：1 に内分する点を D，辺 BC の中点を M とし，AM と CD の交点を E とする。$\overrightarrow{AE}$ を $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ を用いて表せ。

[1]　AP：PD$=s:(1-s)$ とおくと

$$\overrightarrow{OP}=(1-s)\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{OD}=(1-s)\vec{a}+\frac{4}{5}s\vec{b}\ \cdots\cdots ①$$



CP：PB$=t:(1-t)$ とおくと

$$\overrightarrow{OP}=(1-t)\overrightarrow{OC}+t\overrightarrow{OB}=\frac{3}{4}(1-t)\vec{a}+t\vec{b}\ \cdots\cdots ②$$

①，②より　$(1-s)\vec{a}+\frac{4}{5}s\vec{b}=\frac{3}{4}(1-t)\vec{a}+t\vec{b}$

$\vec{a}$，$\vec{b}$ は 1 次独立であるから　$1-s=\frac{3}{4}(1-t)$，$\frac{4}{5}s=t$　　よって　$s=\frac{5}{8}$，$t=\frac{1}{2}$

したがって　$\overrightarrow{OP}=\frac{3}{8}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$

$\overrightarrow{OQ}=k\overrightarrow{OP}$（$k$ は実数）とおくと，$\vec{a}=\frac{4}{3}\overrightarrow{OC}$，$\vec{b}=\frac{5}{4}\overrightarrow{OD}$ より

$$\overrightarrow{OQ}=k\left(\frac{3}{8}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}\right)=\frac{3}{8}k\vec{a}+\frac{1}{2}k\vec{b}=\frac{1}{2}k\overrightarrow{OC}+\frac{5}{8}k\overrightarrow{OD}\ \cdots\cdots ③$$

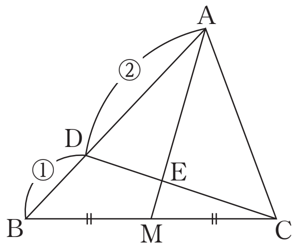
CQ：QD$=u:(1-u)$ とおくと　$\overrightarrow{OQ}=(1-u)\overrightarrow{OC}+u\overrightarrow{OD}$ …… ④

③，④より　$\frac{1}{2}k\overrightarrow{OC}+\frac{5}{8}k\overrightarrow{OD}=(1-u)\overrightarrow{OC}+u\overrightarrow{OD}$

$\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{OD}$ は 1 次独立より　$\frac{1}{2}k=1-u$，$\frac{5}{8}k=u$　　よって　$k=\frac{8}{9}$，$u=\frac{5}{9}$

したがって　$\overrightarrow{OQ}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{4}{9}\vec{b}$

［2］ $\overrightarrow{AE}=k\overrightarrow{AM}$ （k は実数）とおくと，$\overrightarrow{AB}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AD}$ より



$$\overrightarrow{AE}=k\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{2}k\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}k\overrightarrow{AC}$$

$$=\frac{3}{4}k\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}k\overrightarrow{AC}$$

点 E は線分 CD 上の点であるから　$\frac{3}{4}k+\frac{1}{2}k=1$　　　$k=\frac{4}{5}$

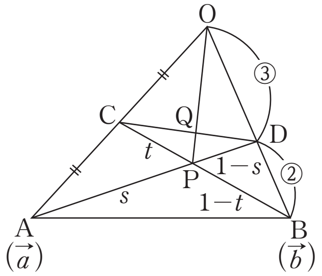
したがって　$\overrightarrow{AE}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$

第10講　PART1　確認問題 解答

1

[正解] ア：2，イ：7，ウ：3，エ：7，オ：2，
カ：9，キ：1，ク：3

[解説]



AP：PD＝s：$(1-s)$ とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-s)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{OD}}$$ [A]

$$=(1-s)\vec{a}+\frac{3}{5}s\vec{b}\ \cdots\cdots ①$$

CP：PB＝t：$(1-t)$ とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OC}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$ [A]

$$=\frac{1}{2}(1-t)\vec{a}+t\vec{b}\ \cdots\cdots ②$$

①，②より

$$(1-s)\vec{a}+\frac{3}{5}s\vec{b}=\frac{1}{2}(1-t)\vec{a}+t\vec{b}$$

$\vec{a}$，$\vec{b}$ は 1 次独立であるから

$$1-s=\frac{1}{2}(1-t),\quad \frac{3}{5}s=t$$

よって　$s=\dfrac{5}{7}$，$t=\dfrac{3}{7}$

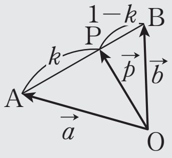
したがって　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{2}{7}\vec{a}+\dfrac{3}{7}\vec{b}}$

$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=k\overrightarrow{\mathrm{OP}}$（$k$ は実数）とおくと，

$\vec{a}=2\overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$\vec{b}=\dfrac{5}{3}\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{2}{7}k\vec{a}+\frac{3}{7}k\vec{b}=\frac{4}{7}k\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\frac{5}{7}k\overrightarrow{\mathrm{OD}}\ \cdots\cdots ③$$

[A]　線分 AB を内分する点 P について，3 点 A，B，P の位置ベクトルをそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{p}$ とすると
$\vec{p}=(1-k)\vec{a}+k\vec{b}$ $(0<k<1)$
と表される。



CQ：QD＝u：$(1-u)$ とおくと

$$\overrightarrow{OQ}=(1-u)\overrightarrow{OC}+u\overrightarrow{OD}\ \cdots\cdots④$$

③，④より

$$\frac{4}{7}k\overrightarrow{OC}+\frac{5}{7}k\overrightarrow{OD}=(1-u)\overrightarrow{OC}+u\overrightarrow{OD}$$

$\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{OD}$ は１次独立であるから

$$\frac{4}{7}k=1-u,\ \frac{5}{7}k=u$$

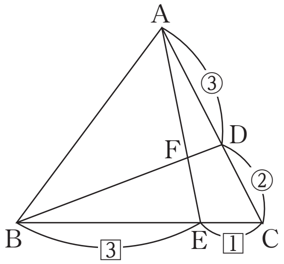
よって　$k=\dfrac{7}{9}$，$u=\dfrac{5}{9}$

したがって　$\boldsymbol{\overrightarrow{OQ}=\dfrac{2}{9}\vec{a}+\dfrac{1}{3}\vec{b}}$

2

[正解] ケ：1，コ：6，サ：1，シ：2

[解説]



$\overrightarrow{AF}=k\overrightarrow{AE}$（$k$ は実数）とおくと，$\overrightarrow{AC}=\dfrac{5}{3}\overrightarrow{AD}$ より

$$\overrightarrow{AF}=k\left(\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{4}k\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}k\overrightarrow{AC}$$

$$=\frac{1}{4}k\overrightarrow{AB}+\frac{5}{4}k\overrightarrow{AD}$$

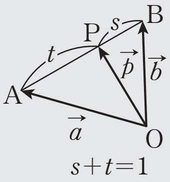
点 F は直線 BD 上の点であるから

$$\frac{1}{4}k+\frac{5}{4}k=1$$ [B]

よって　$k=\dfrac{2}{3}$

したがって　$\boldsymbol{\overrightarrow{AF}=\dfrac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}}$

[B]　点 P が直線 AB 上にあるとき，3 点 A，B，P の位置ベクトルをそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{p}$ とすると

$\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}$，$s+t=1$

と表される。すなわち，$\vec{p}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表したときの $\vec{a}$，$\vec{b}$ の係数の和が 1 である。